《第３講　総合演習（その３）》

5　座標平面上の点 A(1，2) と点 B(−1，−2) からの距離の差が 2 であるように動く点が描く双曲線を C とする．以下の問いに答えよ．

(1)　変数 t を実数として，x 軸上の点 Q(t，0) を考える．線分 AQ の長さと線分 BQ の長さの差を $g(t)$ とする．極限値

$$\lim_{t\to\infty} g(t)$$

を求めよ．

(2)　双曲線 C の方程式を求めよ．ただし，答えは

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

(a，b，c，d，e，f は実数) の形に書くこと．

(3)　方程式 $y=mx$ で表される直線と，双曲線 C が共有点を持つような実数 m の範囲を求めよ．

6 関数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $(x \geqq 1)$ と関数 $g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t \geqq 0)$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $g(t) \geqq 1$ を示せ．

(2) $a>0$ とする．定積分 $\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)\,dt$ を求めよ．

(3) 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．$p>1$ とし，C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線を l とする．このとき，曲線 C，直線 l，x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ．

《第３講　総合演習（その３）》

5　座標平面上の点 A(1, 2) と点 B(−1, −2) からの距離の差が 2 であるように動く点が描く双曲線を C とする．以下の問いに答えよ．

(1)　変数 t を実数として，x 軸上の点 Q(t, 0) を考える．線分 AQ の長さと線分 BQ の長さの差を $g(t)$ とする．極限値

$$\lim_{t\to\infty} g(t)$$

を求めよ．

(2)　双曲線 C の方程式を求めよ．ただし，答えは

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

(a, b, c, d, e, f は実数) の形に書くこと．

(3)　方程式 $y=mx$ で表される直線と，双曲線 C が共有点を持つような実数 m の範囲を求めよ．

【答】 (1)　2　　(2)　$4xy+3y^2-4=0$　　(3)　$m<-\dfrac{4}{3}$，$0<m$

【解説】 (1)

$$\begin{aligned} g(t) &= |\mathrm{AQ}-\mathrm{BQ}| \\ &= \left|\sqrt{(t-1)^2+4}-\sqrt{(t+1)^2+4}\right| \\ &= \left|\frac{-4t}{\sqrt{(t-1)^2+4}+\sqrt{(t+1)^2+4}}\right| \\ &= \left|\frac{-4}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{t}\right)^2+\frac{4}{t^2}}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+\frac{4}{t^2}}}\right| \to 2\ (t\to\infty) \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)=2$

(2)　C 上の点を P(x, y) とすると AP−BP＝2 のとき AP＝BP＋2 なので

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+2$$

の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} &(x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y+2)^2+4\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+4 \\ \iff\ &\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=-x-2y-1 \\ \iff\ &(x+1)^2+(y+2)^2=(-x-2y-1)^2 \text{ かつ } -x-2y-1\geqq 0 \\ \iff\ &4xy+3y^2-4=0 \text{ かつ } y\leqq -\frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

BP−AP＝2 のときも同様に $4xy+3y^2-4=0$ かつ $y\geqq -\dfrac{x-1}{2}$ を得る．

以上より $4xy+3y^2-4=0$.

(3)　$4xy+3y^2-4=0$ に $y=mx$ を代入して

$$4x\cdot mx+3(mx)^2-4=0 \iff m(3m+4)x^2=4$$

となるので，これが異なる 2 つの実数解をもつ条件は $m(3m+4)>0$ つまり

$m<-\dfrac{4}{3}$，$0<m$.

$\boxed{6}$ 関数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $(x\geqq 1)$ と関数 $g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t\geqq 0)$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $g(t)\geqq 1$ を示せ．

(2) $a>0$ とする．定積分 $\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)\,dt$ を求めよ．

(3) 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．$p>1$ とし，C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線を l とする．このとき，曲線 C，直線 l，x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ．

【答】 (1) 略　(2) $\dfrac{1}{8}(e^{2a}-e^{-2a})-\dfrac{1}{2}a$　(3) $\dfrac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)-\dfrac{\sqrt{p^2-1}}{2p}$

【解説】 (1) $e^t>0$，$e^{-t}>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係を用いて

$$\frac{e^t+e^{-t}}{2}\geqq\sqrt{e^t\cdot e^{-t}}=1$$

よって $g(t)\geqq 1$ が示された．

(2) $f(g(t))=\sqrt{\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$，$g'(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^a f(g(t))g'(t)\,dt &= \int_0^a \frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt\\ &= \int_0^a\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{4}-\frac{1}{2}\right)dt\\ &= \left[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8}-\frac{1}{2}t\right]_0^a\\ &= \frac{1}{8}(e^{2a}-e^{-2a})-\frac{1}{2}a\end{aligned}$$

(3) $y=\sqrt{x^2-1}$ $(x\geqq 1)$ より $y^2=x^2-1$ ($x\geqq 1$ かつ $y\geqq 0$) つまり $x^2-y^2=1$ ($x\geqq 1$ かつ $y\geqq 0$) であることと，$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ より $x=p$ における接線は

$$y=\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(x-p)+\sqrt{p^2-1}$$

となり，これと $y=0$ より $x=\dfrac{1}{p}$ となるので

$$S = \frac{1}{2}\times\left(p-\frac{1}{p}\right)\times\sqrt{p^2-1}-\int_1^p\sqrt{x^2-1}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_1^p\sqrt{x^2-1}\,dx$ において，$x=g(t)$ と置換積分すると

$p=g(t)$ より $p=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\iff e^{2t}-2pe^t+1=0$ なので $e^t=p+\sqrt{p^2-1}$ つまり

$t=\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)$ であり，$t\geqq 0$ より $\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1}=\sqrt{p^2-1}$ となる．

よって $\alpha=\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)$ とおくと $\dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}=p$, $\dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}=\sqrt{p^2-1}$ より

$$\frac{1}{8}(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})-\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\times\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}-\frac{1}{2}\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\times p\times\sqrt{p^2-1}-\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)$$ なので

$$S=\frac{1}{2}\times\left(p-\frac{1}{p}\right)\times\sqrt{p^2-1}-\left\{\frac{1}{2}\times p\times\sqrt{p^2-1}-\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)-\frac{\sqrt{p^2-1}}{2p}$$